

1.1.11 Proměnná

Předpoklady: 010110

Počítání nebylo zas tak těžké, dokud se v matematice neobjevila písmenka. Co znamenají?

- 4 - konkrétní číslo, vždy znamená to samé, můžeme si ho představit (čtyři prsty, čtyři kuličky, čtyři koruny)
- x - proměnná, představuje číslo, ale nevíme které (často se snažíme zjistit jaké), také si ji můžeme představit:
 - žolík v kartách (můžeme ho vyložit místo karty libovolné hodnoty),
 - skříňka uvnitř které je neznámý počet předmětů,
 - peněženka s neznámým obnosem
 - ...

Proměnná představuje číslo, a proto s ní zacházíme jako s číslem (pokud chceme provést operaci, kterou můžeme provést se všemi čísly, nemusíme se ničeho obávat, pokud chceme provést operaci, kterou se všemi čísly provést nemůžeme, musíme být opatrní).

Př. 1: Mezi tím, jak používáme proměnné v matematice a žolíky v kartách, je zásadní rozdíl. Jaký?

V kartách můžeme na stůl vyložit v jedné hře více stejných žolíků a každý může představovat jinou kartu. V matematice znamenají v jednom případě všechny proměnné označené stejným písmenem stejné číslo.

Př. 2: Honza má půjčovnu. V ní je celkem a aut, m motorek a v přívěsných vozíků. Kolik má v půjčovně celkem: a) kol b) různých registračních značek?

a) počet kol

Auto má čtyři kola, motorka i přívěsný vozík dvě: $4a + 2m + 2v$.

b) počet registračních značek

Registrační značku musí mít auto, motorka i vozík: $a + m + v$.

Př. 3: SJ Slavoj Houslice hodlá otevřít fotbalovou akademii. Akademie bude mít zatím neurčený počet fotbalových tříd. Každou fotbalovou třídu bude navštěvovat 15 malých fotbalistů, starat se o ně bude dvojice trenérů. Pro každého fotbalistu musí být k dispozici tři dresy a dva míče, pro každého trenéra dvě pískalky. Vždy dvě fotbalové třídy budou sdílet jednu šatnu, na úklid pěti šaten je třeba jedna uklízečka. Pro každou uklízečku je třeba zakoupit dvě velká košťata a tři hadry. Urči počet fotbalistů, trenérů, dresů, míčů, pískalek, šaten, uklízeček, košťat a hadrů, které bude třeba pořídit v závislosti na počtu fotbalových tříd, které budou otevřeny. Počet tříd označ písmenem t . Kolik hadrů bude potřeba, pokud otevřou 5, 10, 20 tříd?

Každou fotbalovou třídu bude navštěvovat 15 malých fotbalistů: fotbalistů $15 \cdot t$,

o každou třídu se bude starat dvojice trenérů: trenérů $2 \cdot t$.

Pro každého fotbalistu musí být k dispozici tři dresy: dresů $3 \cdot 15t = 45t$.

Pro každého fotbalistu musí být k dispozici dva míče: míčů $2 \cdot 15t = 30t$.

Pro každého trenéra musí být k dispozici dvě píšťalky: píšťalek $2 \cdot 2t = 4t$.

Vždy dvě fotbalové třídy budou sdílet jednu šatnu: šaten: $t : 2 = \frac{t}{2}$.

Na úklid pěti šaten je třeba jedna uklízečka: uklízeček $\frac{t}{2} : 5 = \frac{t}{10}$.

Pro každou uklízečku je třeba zakoupit dvě velká košťata: košťat: $\frac{t}{10} \cdot 2 = \frac{t}{5}$.

Pro každou uklízečku je třeba zakoupit tři hadry: hadrů $\frac{t}{10} \cdot 3 = \frac{3t}{10}$.

Počty hadrů podle počtu tříd:

- 5 tříd: $\frac{3t}{10} = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{3}{2}$ hadru (zřejmě stačí 2 hadry),
- 10 tříd: $\frac{3t}{10} = \frac{3 \cdot 10}{10} = 3$ hadry,
- 20 tříd: $\frac{3t}{10} = \frac{3 \cdot 20}{10} = 6$ hadrů.

Dodatek: Nákup hadrů by asi nebyl tím největším problémem, každopádně použití neznámé umožňuje vyřešit problém obecně a pak jen dopočítávat dosazením konkrétní hodnoty.

Př. 4: Vypočti. Ověř výsledky dosazením libovolných čísel za proměnné.

a) $x + 1 + x + 3$

b) $2 \cdot y + 2y + 3$

c) $z - \frac{z}{3}$

d) $a + \frac{a}{4}$

e) $b \cdot (b + 2)$

f) $c - \frac{1}{4}$

g) $d + 2(d + 3)$

h) $e \cdot 2e \cdot e$

a) $x + 1 + x + 3 = 2x + 4$

Dosazení $x = 2$:

- $x + 1 + x + 3 = 2 + 1 + 2 + 3 = 8$,
- $2x + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

b) $2 \cdot y + 2y + 3 = 2y + 2y + 3 = 4y + 3$

Dosazení $y = 3$:

- $2 \cdot y + 2y + 3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 = 15$,
- $4y + 3 = 4 \cdot 3 = 15$.

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

c) $z - \frac{z}{3} = \frac{3z}{3} - \frac{z}{3} = \frac{3z - z}{3} = \frac{2z}{3}$

Dosazení $z = 9$:

- $z - \frac{z}{3} = 9 - \frac{9}{3} = 9 - 3 = 6$,

- $\frac{2z}{3} = \frac{2 \cdot 9}{3} = 2 \cdot 3 = 6.$

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

d) $a + \frac{a}{4} = \frac{4a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{4a + a}{4} = \frac{5a}{4}$

Dosazení $a = 8$:

- $a + \frac{a}{4} = 8 + \frac{8}{4} = 8 + 2 = 10,$
- $\frac{5a}{4} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 5 \cdot 2 = 10.$

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

e) $b \cdot (b + 2) = b \cdot b + b \cdot 2 = b^2 + 2b$

Dosazení $b = -1$:

- $b \cdot (b + 2) = (-1) \cdot (-1 + 2) = (-1) \cdot 1 = -1,$
- $b^2 + 2b = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1.$

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

f) $c - \frac{1}{4}$ nejde upravit (nevíme, jaké číslo představuje proměnná c a nemůžeme od něj tedy odečíst $\frac{1}{4}$).

g) $d + 2(d + 3) = d + 2d + 6 = 3d + 6$

Dosazení $d = -3$:

- $-3 + 2(-3 + 3) = -3 + 2 \cdot 0 = -3,$
- $3 \cdot (-3) + 6 = -9 + 6 = -3.$

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

h) $e \cdot 2e \cdot e = 2 \cdot e \cdot e \cdot e = 2e^3$

Dosazení $e = 2$:

- $e \cdot 2e \cdot e = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16,$
- $2e^3 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16.$

Výsledky jsou shodné $\Rightarrow$ úprava je zřejmě správná.

Pedagogická poznámka: Cílem je, aby každý žák zkoušel dosazovat jiná čísla. Za diskusi stojí i volba čísel pro dosazení. Proč se nehodí 0, 1 nebo naopak proč se hodí v bodě c) 9 a v bodě d) 8.

Př. 5: Vypočti a zdůvodni na konkrétním příkladu výpočty:

a) $x + 3x$ b) $5y - 3y$ c) $z - \frac{z}{2}$ d) $z + \frac{z}{3}$ e) $3x \cdot 2x$

a) $x + 3x = 4x$

Pokud já mám jeden sáček s libovolným počtem bonbónů a koupím další tři stejné sáčky, budu mít čtyři stejné sáčky.

b) $5y - 3y = 2y$

Pokud z pěti sáčků bonbónů tři sáčky sním, zbudou dva sáčky.

c) $z - \frac{z}{2} = \frac{2z}{2} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}$

Pokud sním polovinu bonbónů ze sáčku, ještě polovina sáčku zbude.

d) $z + \frac{z}{3} = \frac{3z}{3} + \frac{z}{3} = \frac{4}{3}z$

Pokud ke vzdálenosti, kterou jsem už ušel do přestávky, přidám ještě třetinu, ujdu čtyři třetiny původní vzdálenosti, kterou jsem ušel do přestávky.

e) $3x \cdot 2x = 6x^2$

Pokud vydláždím obdélník o stranách tři a dvě dlaždice, bude vydlážděná plocha šest obsahů každé dlaždice (a budu potřebovat 6 dlaždic).

Př. 6: Hugvenc má h korun. Popiš slovy, kolik korun mají v porovnání s ním jeho kamarádi, kteří mají:

a) Karel: $h + 2$, b) Jirka: $\frac{h}{5}$, c) Martina: $3h$, d) Eva: $\frac{5h}{3}$.

a) Karel: $h + 2$

Karel má o dvě koruny více než Hugvenc.

b) Jirka: $\frac{h}{5}$

Jirka má jen pětinu toho co Hugvenc.

c) Martina: $3h$

Martina má třikrát tolik co Hugvenc.

d) Eva: $\frac{5h}{3}$

Eva má o dvě třetiny více než Hugvenc.

Shrnutí: Proměnnou používáme k označení zatím neznámého čísla.